פתרון מטלה 04 — תבניות ריבועיות ומספרים P-אדיים, 80507

15 ביוני 2026

שאלה 1

יהי $(\mathbb{F}, \|\cdot\|)$ שדה נורמי לא ארכימדי ולא טריוויאלי כך שקיים $\varepsilon = \max\left\{\|x\| \mid x \in \mathcal{M}_{\|\cdot\|}\right\}$ (נורמה כזאת נקראית בדידה).

סעיף א'

נוכיח $\{\|x\| \mid x \in \mathbb{F}^\times\} = \{\varepsilon^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה: מהיות הנורמה בדידה קיים $\pi \in \mathcal{M}$ כך ש־$|\pi| = \varepsilon$.
$\{\varepsilon^k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{|x| : x \in \mathbb{F}^\times\}$: $\pi \in \mathbb{F}^\times$ ומתקיים $|\pi| = \varepsilon$ ולכן מכפליות הנורמה, לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $|\pi^k| = |\pi|^k = \varepsilon^k$, כנדרש.
$\{|x| : x \in \mathbb{F}^\times\} \subseteq \{\varepsilon^k : k \in \mathbb{Z}\}$: נניח ללא הגבלת הכלליות ש־$|x| < 1$ אחרת, נסתכל על $\frac{1}{x}$. אם $|x| = 1$ אז $|x| = \varepsilon^0$ ואחרת $x \in \mathcal{M}$.
מכך ש־ε הוא המקסימום של הנורמות ב־$\mathcal{M}$ מתקיים $|x| < \varepsilon$. אם $|x| = \varepsilon$, סיימנו. אחרת, נסתכל על $\left|\frac{x}{\pi}\right|$ ומתקיים

$$\left|\frac{x}{\pi}\right| = \frac{|x|}{|\pi|} = \frac{|x|}{\varepsilon}$$

ונמשיך בתהליך זהה: אם $|x| \neq \varepsilon^k$ לכל k נקבל סדרה אינסופית של נורמות גדלות שחסומות על־ידי 1 וזה סותר את העובדה ש־ε ולכן הוא מקסימום ב־$\mathcal{M}$ ולכן בהכרח $|x| = \varepsilon^k$ עבור $k \in \mathbb{Z}_+$ (אם k שלילי אז נסתכל על ההופכי ואז הטענה נובעת עבור השלילי גם־כן). $\square$

סעיף ב'

נוכיח שקיים $\pi \in \mathcal{M}_{\|\cdot\|}$ כך ש־$\mathcal{M}_{\|\cdot\|} = \pi\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$.

הוכחה: יהי $\pi \in \mathcal{M}$ איבר המקיים $|\pi| = \varepsilon$.
$\pi\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$: לכל $a \in \mathcal{O}$, מתקיים $|a| < 1$. לכן $|\pi a| = |\pi||a| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon < 1$, ולכן $\pi a \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \subseteq \pi\mathcal{O}$: יהי $x \in \mathcal{M}$, כלומר $|x| < 1$. מכיוון ש$|x| < \varepsilon$ (כי ε מקסימלי ב־$\mathcal{M}$), מתקיים $\left|\frac{x}{\pi}\right| = \frac{|x|}{\varepsilon} < 1$. מכאן ש־$\frac{x}{\pi} \in \mathcal{O}$, כלומר $x \in \pi\mathcal{O}$ ומכאן $\mathcal{M} = \pi\mathcal{O}$. $\square$

סעיף ג'

לכל אידיאל I של $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$I = \pi^n\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$.

הוכחה: יהי $I \subseteq \mathcal{O}$ אידיאל.
אם $I = \{0\}$, אז $I = \pi^\infty\mathcal{O}$ (או פשוט אידיאל האפס).
אם $I \neq \{0\}$, נגדיר את הקבוצה $S = \{|x| : x \in I \setminus \{0\}\}$ וזו תת־קבוצה של ערכי הנורמה $\{\varepsilon^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ והיא אינה ריקה ולכן קיים לה איבר מקסימלי ε^n עבור $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
יהי $\pi^n \in I$ כך ש־$|\pi^n| = \varepsilon^n$.
$\pi^n\mathcal{O} \subseteq I$: מכיוון ש־$\pi^n \in I$ ו־I אידיאל, לכל $a \in \mathcal{O}$ מתקיים $\pi^n a \in I$.
$I \subseteq \pi^n\mathcal{O}$: יהי $x \in I$. אזי $|x| < \varepsilon^n$ (לפי מקסימליות הנורמה ב־I). מכאן $\left|\frac{x}{\pi^n}\right| = \frac{|x|}{\varepsilon^n} < 1$, כלומר $\frac{x}{\pi^n} \in \mathcal{O}$, לכן $x \in \pi^n\mathcal{O}$ כלומר $I = \pi^n\mathcal{O}$. $\square$

שאלה 2

יהי $(\mathbb{F}, \|\cdot\|)$ שדה נורמי לא ארכימדי לא טריוויאלי כך שבקבוצה $S = \left\{\|x\| \mid x \in \mathcal{M}_{\|\cdot\|}\right\}$ אין איבר מקסימלי. נוכיח ש־$\sup S = 1$.

הוכחה: מכיוון שלכל $x \in \mathcal{M}$ מתקיים $|x| < 1$, הקבוצה S חסומה מלעיל על ידי 1 ולכן קיים לה חסם עליון $L = \sup S$ המקיים $L \leq 1$.
נניח בשלילה כי $L < 1$. מהיות הנורמה לא טריוויאלית קיימים איברים ב־$\mathcal{M}$ עם נורמות שונות מ-0. בפרט, קיים איבר $y \in \mathcal{M}$ כך ש־$0 < |y| < 1$.
מכיוון ש־L הוא ה־sup ואין איבר מקסימלי ב־S, לכל $r < L$ קיים $r' \in S$ כך ש־$r < r' < L$. נבחר $z \in \mathcal{M}$ המקיים $L \cdot |y| < |z| < L$ (יש כזה מהגדרת הסופרמום).
נתבונן באיבר $w = \frac{z}{y}$. מתקיים $|w| = \frac{|z|}{|y|} > \frac{L \cdot |y|}{|y|} = L$ וקיבלנו איבר w כך ש־$|w| > L$ ונחלק למקרים:

1. אם $|w| < 1$, אזי $|w| \in S$, וזה סותר את הגדרת L כחסם עליון של S.
2. אם $|w| \geq 1$, זה אומר ש־$|z| \geq |y|$, אבל הנורמה לא טריוויאלית ואין איבר מקסימלי אז תמיד נוכל למצוא איברים שערכי הנורמה שלהם "מטפסים" ומתקרבים ל־1 מה שמכריח את L להיות 1.

קיבלנו סתירה ולכן $\sup S = 1$. $\square$

שאלה 3

נסמן ב־$\mathbb{P}$ את הקבוצה של כל המספרים הראשוניים.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{Q}^\times$, הקבוצה $\left\{p \in \mathbb{P} \mid |x|_p \neq 1\right\}$ היא סופית.

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{Q}^\times$ ולכן מהמשפט היסודי של האריתמטיקה $x = \pm \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ כאשר p_i הם מספרים ראשוניים ו־$n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
מהגדרת הנורמה ה־p־אדית נובע ש־$|x|_p \neq 1$ אם ורק אם p הוא אחד מהראשוניים $\{p_1, ..., p_k\}$ המופיעים בפירוק של x. מכיוון שהפירוק של מספר רציונלי לגורמים ראשוניים הוא סופי נובע שהקבוצה $\left\{p \in \mathbb{P} : |x|_p \neq 1\right\}$ היא סופית. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $|x| \prod_{p \in \mathbb{P}} |x|_p = 1$.

הוכחה: נשתמש בפירוק $x = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$ כאשר $n_p \in \mathbb{Z}$ (ורק מספר סופי מהם שונים מאפס).
מהגדרת הנורמה ה־p־אדית והנורמה של הערך המוחלט נקבל

$$|x| \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} |x|_p = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-n_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (p^{n_p} \cdot p^{-n_p}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} 1 = 1$$

$\square$

שאלה 4

יהיו $p \neq q$ ראשוניים ונוכיח כי קיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים רציונליים שבשדה נורמי $\left(\mathbb{Q}, |\cdot|_p\right)$ היא מתכנסת ובשדה נורמי $\left(\mathbb{Q}, |\cdot|_q\right)$ היא לא חסומה.

הוכחה: נגדיר את הסדרה

$$a_n = p^n \cdot q^{-n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

מתקיים

$$|a_n|_p = \left|\frac{p^n}{q^n}\right|_p = \frac{|p^n|_p}{|q^n|_p} \underset{p \neq q}{=} \frac{|p^n|_p}{1} = p^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

והסדרה אכן מתכנסת ל־0 ב־$|\cdot|_p$. מצד שני מאותם נימוקים,

$$|a_n|_q = \left|\frac{p^n}{q^n}\right|_q = \frac{|p^n|_q}{|q^n|_q} = \frac{1}{q^{-n}} = q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ובפרט הסדרה לא חסומה. $\square$

שאלה 5

יהי $p \neq q$ ראשוניים, $a, b \in \mathbb{Z}$ ו־$\varepsilon i \mathbb{R}_+$. נוכיח כי קיים $z \in \mathbb{Z}$ כך ש־$|z-a|_p < \varepsilon$ וגם $|z-b|_q < \varepsilon$.

הוכחה: נבחר $n \in \mathbb{N}$ גדול מספיק כך ש־$p^{-n} < \varepsilon$ וגם $q^{-n} < \varepsilon$ ולכן אנחנו צריכים לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z \underset{\bmod p^n}{\equiv} a \\ z \underset{\bmod q^n}{\equiv} b \end{cases}$$

שכן מהגדרת הנורמה ה־p־אדית, $|z-a|_p < p^{-n}$ זה אומר ש־$z-a$ מתחלק ב־p^n. ממשפט השאריות הסיני נקבל שקיים פיתרון למשוואה לעיל אם ורק אם המודולים זרים, אבל $p \neq q$ והם ראשוניים אז אכן $\gcd(q^n, p^n) = 1$ ולכן קיימת סדרה של מספרים $z \in \mathbb{Z}$ המקיימים את המשוואה הזאת. $\square$

שאלה 6

יהי p ראשוני, $d \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ ו־$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. נוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־$|q-d|_p < \varepsilon$ וגם $|q-x| < \varepsilon$.

הוכחה: כמקודם, נבחר $n \in \mathbb{N}$ גדול מספיק כך ש־$p^{-n} < \varepsilon$ והתנאי הראשון $|q-d|_p < p^{-n}$ שקול לכך ש־$q \underset{\bmod p^n}{\equiv} d$.
$d \in \mathbb{Q}$ ולכן קיימים $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ כך ש־$d = \frac{a}{b}$ ו־$p \nmid b$ ולכן זה מוגדר היטב.
$\mathbb{Q}$ צפוף ב־$\mathbb{R}$ ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה אינסופית של מספרים רציונליים בסביבה ε של x ואנחנו מחפשים רציונלי מהצורה

$$q = d + p^n \cdot k$$

עבור $k \in \mathbb{Q}$.
אם נבחר k כך ש־$|p^n \cdot k| < \varepsilon$ כלומר $|k| < \frac{\varepsilon}{p^n}$ נקבל ש־$|q-x| < \varepsilon$ וגם $|q-d|_p < \varepsilon$ שכן $q - d = p^n k$ והנורמה ה־p־אדית של p^n היא לכל היותר p^{-n}.
מהצפיפות ניתן גם לבחור k כך ש־$\frac{x-d}{p^n}$ נמצא בסביבה של k ולכן קיים רציונלי כנדרש. $\square$

שאלה 7

יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $\mathrm{DEG}:\mathbb{F}(X)\to\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ על־ידי

$$\mathrm{DEG}\left(\frac{f}{g}\right)=\begin{cases}\deg(f)-\deg(g) & \frac{f}{g}\neq 0\\ -\infty & \frac{f}{g}=0\end{cases}$$

כאשר deg היא הדרגה של הפולינום.

סעיף א'

נוכיח כי DEG מוגדר היטב, כלומר אם $f_1,g_1,f_2,g_2\in\mathbb{F}[X]$ כך ש־$g_1,g_2\neq 0$ וגם $\frac{f_1}{g_1}=\frac{f_2}{g_2}$ אזי $\mathrm{DEG}\left(\frac{f_1}{g_1}\right)=\mathrm{DEG}\left(\frac{f_2}{g_2}\right)$.

הוכחה: אם $f_1=0$, מהיות $g_1\neq 0$ נובע כי $\frac{f_1}{g_1}=0$ ולכן מהשיוויון בהכרח נובע שגם $f_2=0$ כי $g_2\neq 0$ ולכן

$$\mathrm{DEG}\left(\frac{f_1}{g_1}\right)=-\infty=\mathrm{DEG}\left(\frac{f_2}{g_2}\right)$$

נניח ש־$f_1,f_2\neq 0$ ומהשיוויון הנתון נובע כי $f_1\cdot g_2=f_2\cdot g_1$ ולכן מכפליות הדרגה נקבל

$$\deg(f_1\cdot g_2)=\deg(f_2\cdot g_1)\iff\deg(f_1)+\deg(g_2)=\deg(f_2)+\deg(g_1)\iff\deg(f_1)-\deg(g_1)=\deg(f_2)-\deg(g_2)$$

אבל הביטוי משמאל זה בידיוק הגדרת DEG, כלומר קיבלנו ש־DEG מוגדרת היטב. □

סעיף ב'

נוכיח שלכל $\varphi,\psi\in\mathbb{F}(X)$ מתקיימת כפליות, כלומר

$$\mathrm{DEG}(\varphi\psi)=\mathrm{DEG}(\varphi)+\mathrm{DEG}(\psi)$$

הוכחה: יהיו $\varphi,\psi\in\mathbb{F}(X)$ פולינומים ששונים מ־0 ולכן מהגדרה קיימים $f_1,f_2,g_1,g_2\in\mathbb{F}[X]\setminus\{0\}$ כך ש־$\varphi=\frac{f_1}{g_1},\ \psi=\frac{f_2}{g_2}$ אז גם המכפלה שלהם הוא פולינום שנתון על־ידי

$$\varphi\cdot\psi=\frac{f_1}{g_1}\cdot\frac{f_2}{g_2}=\frac{f_1\cdot f_2}{g_1\cdot g_2}$$

ולכן מהגדרת DEG ומכפליות deg נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{DEG}(\varphi\cdot\psi)&=\deg(f_1\cdot f_2)-\deg(g_1\cdot g_2)\\&=\deg(f_1)+\deg(f_2)-(\deg(g_1)+\deg(g_2))\\&=(\deg(f_1)-\deg(g_1))+(\deg(f_2)-\deg(g_2))\\&=\mathrm{DEG}\left(\frac{f_1}{g_1}\right)+\mathrm{DEG}\left(\frac{f_2}{g_2}\right)\\&=\mathrm{DEG}(\varphi)+\mathrm{DEG}(\psi)\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נוכיח שלכל $\varphi,\psi\in\mathbb{F}(X)$ מתקיים

$$\mathrm{DEG}(\varphi+\psi)\leq\max(\mathrm{DEG}(\varphi),\mathrm{DEG}(\psi))$$

הוכחה: כמקודם, יהיו $\varphi,\psi\in\mathbb{F}(X)$ פולינומים ששונים מ־0 ולכן ניתן לכתוב אותם על־ידי מנות של פולינומים בעלי מכנה משותף

$$\varphi=\frac{f}{g}\qquad\psi=\frac{h}{g}$$

כאשר $f,h,g\in\mathbb{F}[X]$ ו־$g\neq 0$. מהגדרת DEG מתקיים

$$\mathrm{DEG}(\varphi+\psi)=\mathrm{DEG}\left(\frac{f+h}{g}\right)=\deg(f+h)-\deg(g)$$

אבל מתכונות הדרגה של פולינום אנחנו יודעים שמתקיים $\deg(f+h)\leq\max(\deg(f),\deg(h))$ ולכן

$$\mathrm{DEG}(\varphi+\psi)\leq\max(\deg(f),\deg(h))-\deg(g)=\max(\deg(f)-\deg(g),\deg(h)-\deg(g))=\max(\mathrm{DEG}(\varphi),\mathrm{DEG}(\psi))$$

ברור אם $\psi+\varphi=0$ אז $\mathrm{DEG}(\psi+\varphi)=-\infty$ והטענה נכונה באופן טריוויאלי ואם $\mathrm{DEG}(\varphi)=\mathrm{DEG}(\psi)$ אז יש שיוויון ולא אי־שיוויון. □

שאלה 8

יהי $\mathbb{F}$ שדה, $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 < \alpha < 1$. נגדיר $|\cdot|_\alpha : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{R}^+$ על־ידי

$$|\varphi|_\alpha = \alpha^{-\operatorname{DEG}(\varphi)} = \alpha^{-\operatorname{DEG}\left(\frac{f}{g}\right)} = \alpha^{\deg(g) - \deg(f)}$$

נוכיח שהנורמה $|\cdot|$ היא נורמה לא ארכימדית על $\mathbb{F}(X)$.

הוכחה: כדי להראות שהנורמה לא ארכימדית עלינו להראות שהיא מקיימת את אי־שיוויון האולטרה מטרי החזק, כלומר שלכל $x, y \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

אז יהיו $\varphi, \psi \in \mathbb{F}(X)$. מהגדרת הנורמה

$$|\varphi + \psi| = \alpha^{-\operatorname{DEG}(\varphi+\psi)} \leq \max\left(\alpha^{-\operatorname{DEG}(\varphi)}, \alpha^{-\operatorname{DEG}(\psi)}\right)$$

מהיות $\alpha \in (0, 1)$ נובע כי הפונקציה $t \mapsto \alpha^{-t}$ היא פונקציה עולה ולכן מספיק להראות שאי־השיוויון מתקיים עבור המעריכים, אבל זה בידיוק מה שראינו בשאלה הקודמת

$$\operatorname{DEG}(\psi + \varphi) \leq \max(\operatorname{DEG}(\varphi), \operatorname{DEG}(\psi))$$

כלומר אי־שיוויון האולטרה מטרי החזק מתקיים ולכן הנורמה לא ארכימדית. $\square$

שאלה 9

יהי $\mathbb{F}$ שדה ו־$\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 < \alpha < 1$. נגדיר $|\cdot|_\alpha : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{R}^+$ על־ידי

$$|\varphi|_\alpha = \alpha^{-\operatorname{DEG}(\varphi)} = \alpha^{-\operatorname{DEG}\left(\frac{f}{g}\right)} = \alpha^{\deg(g)-\deg(f)}$$

סעיף א'

נוכיח שמתקיים $\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha} = \left\{\frac{f}{g} \mid f,g \in \mathbb{F}[X],\ g \neq 0,\ \deg(f) \leq \deg(g)\right\}$.

הוכחה: כזכור, הגדרנו $\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha} = \{\varphi \in \mathbb{F}(X) \mid |\varphi|_\alpha \leq 1\}$ ונסמן את הקבוצה הנתונה לנו ב־S, נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.

$S \subseteq \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$: יהי $\varphi \in S$ ולכן קיימים $f,g \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$g \neq 0$, $\varphi = \frac{f}{g}$ ו־$\deg(f) \leq \deg(g)$, ולכן

$$|\varphi|_\alpha = \alpha^{\deg(g)-\deg(f)}$$

אבל מהנתון $k = \deg(g) - \deg(f) \geq 0$ מכך ש־$\alpha \in (0,1)$ נובע ש־$\alpha^k \leq 1$ (והערך הוא מקסימלי כאשר $k = 0$) ולכן $\varphi \in \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$.

$S \supseteq \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$: יהי $\varphi \in \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$ ולכן $|\varphi|_\alpha \leq 1$. נכתוב $\varphi = \frac{f}{g}$ עבור $f,g \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$g \neq 0$ (תמיד יש כאלו מהגדרת חוג הפונקציות הרציונליות) ולכן

$$|\varphi|_\alpha = \alpha^{\deg(g)-\deg(f)} \leq 1$$

אבל שוב $\alpha \in (0,1)$ ולכן $t \mapsto \alpha^t$ היא פונקציה יורדת ולכן כדי שיתקיים $\alpha^{\deg(g)-\deg(f)} \leq 1 = \alpha^0$ חייב להתקיים גם $\deg(g) - \deg(f) \geq 0$ אבל זה מתקיים אם ורק אם $\deg(f) \leq \deg(g)$ אבל זה בידיוק אומר ש־$\varphi \in S$ לפי הגדרה.

מצאנו הכלה דו־כיוונית ולכן יש שיוויון. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים $\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} = \left\{\frac{f}{g} \mid f,g \in \mathbb{F}[X],\ g \neq 0,\ \deg(f) < \deg(g)\right\} = \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$.

הוכחה: כזכור, הגדרנו $\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} = \{\varphi \in \mathbb{F}(X) \mid |\varphi|_\alpha < 1\}$.

כמקודם, $\alpha^{\deg(g)-\deg(f)} < 1$ ומכך שהפונקציה יורדת חייב להתקיים $\deg(g) - \deg(f) > 0$ ולכן $\deg(f) < \deg(g)$ ובפרט כמקודם החלק הראשון של הטענה נובע.

נוכיח ש־$\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} = \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$ באמצעות הכלה דו־כיוונית.

$\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} \subseteq \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$: יהי $\varphi \in \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$ ולכן $\varphi = \frac{1}{X} \cdot \psi$ עבור $\psi \in \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$. מהסעיף הקודם, קיימים $f,g \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$\psi = \frac{f}{g}$, $g \neq 0$ ו־$\deg(f) \leq \deg(g)$.

המונה במכפלה שלנו לא השתנה אבל המכנה כן –הוא נהפך להיות $X \cdot g$ אבל $\deg(X \cdot g) = \deg(X) + \deg(g) = 1 + \deg(g)$.

אבל אם $\deg(f) \leq \deg(g)$ אז בהכרח $\deg(f) < \deg(g) + 1$ אבל זה בידיוק אומר ש־$\varphi \in \mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha}$.

$\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} \supseteq \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$: יהי $\varphi = \frac{f}{g} \in \mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha}$ ולכן $\deg(f) < \deg(g)$. ניתן לכתוב

$$\varphi = \frac{1}{X} \cdot \left(\frac{f \cdot X}{g}\right)$$

נראה ש־$\frac{f \cdot X}{g} \in \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$, כמקודם מתקיים $\deg(f \cdot X) = \deg(f) + 1$ ומכיוון ש־$\deg(f) < \deg(g)$ אזי $\deg(f) + 1 \leq \deg(g)$ ולכן בביטוי שלנו דרגת המונה קטנה שווה לדרגת המכנה ולכן $\frac{f \cdot X}{g} \in \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$ כלומר $\varphi \in \frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$.

הראינו הכלה דו־כיוונית ולכן יש שיוויון. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\overline{\mathbb{F}(X)}_{|\cdot|_\alpha} \cong \mathbb{F}$.

הוכחה: ראינו עד־כה

$$\overline{\mathbb{F}(X)}_{|\cdot|_\alpha} = \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}/\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha} = \mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}/\frac{1}{X}\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$$

נגדיר $\varphi : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{F}$ על־ידי

$$\varphi\left(\frac{a_n x^n + \cdots + a_0 x^0}{b_n x^n + \cdots + b_0 x^0}\right) = \frac{a_n}{b_n}$$

שכן מהגדרות $\mathcal{O}_{|\cdot|_\alpha}$ ו־$\mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha}$ על דרגות הפולינומים.

φ הומומורפיזם של חוגים והוא על כי כל $c \in \mathbb{F}$, הפולינום הקבוע $\frac{c}{1}$ מקיים $\varphi\left(\frac{c}{1}\right) = c$.

יתר על־כן, $\frac{f}{g} \in \ker\varphi$ אם ורק אם $a_n = 0$ ואם $a_n = 0$ אזי $\deg(f) < n = \deg(g)$ ולכן $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha}$ והאחרון הוא אידיאל מקסימלי ולכן $\ker\varphi = \mathcal{M}_{|\cdot|_\alpha}$.

ממשפט האיזומורפיזם הראשון לחוגים נקבל ש־$\mathbb{F} \cong \mathbb{F}(X)/\ker\varphi = \overline{\mathbb{F}(X)}_{|\cdot|_\alpha}$, כנדרש. $\square$